CERCETARI PRIVIND CALCULUL MATRICILOR JACOBIENE CORESPUNZATOARE MECANISMELOR ROBOTILOR INDUSTRIALI

Dorin BADOIU, Lavinia STANCIU
Universitatea Petrol-Gaze Ploiesti, badoiu@mail.upg-ploiesti.ro

Cuvinte cheie: robot, mecanism activ, matrice jacobiana

Abstract. The paper presents a method that permits the calculus of the Jacobean matrices corresponding to the active industrial robots mechanisms, in a recursive manner. The method can be applied for any spatial configuration of the robots. It uses the homogeneous transformations matrices and their derivatives with the generalized coordinates. Finally, the method is applied for a cylindrical robot arm.

1. CONSIDERATII TEORETICE

De multe ori, în vederea realizarii comenzilor robotilor industriali, tinând seama si de viteza de deplasare a acestora, este necesara determinarea modelului cinematic sau a modelului diferential al acestora. Cele doua modele sunt echivalente si determinarea lor depinde de calculul prealabil al matricelor jacobiene corespunzatoare structurii robotilor analizati.

Se considera cazul general al unui robot industrial al carui mecanism are o structura de lant cinematic deschis, simplu, ce contine (n+1) elemente cinematice, numerotate cu 0,1,2,…n (elementul (0) fiind elementul cinematic fix) si (n) cuple cinematice active de clasa a V-a, de rotatie sau de translatie, notate cu $C_1, C_2, ... C_n$.

Considerând reperul de referinta fix $(T_0) = (O_0 x_0 y_0 z_0)$, variatia în raport cu axele acestuia a vectorului de pozitie ${}^{(0)}r_P$ al unui punct oarecare P, apartinand elementului cinematic (i) din componenta unui robot industrial, corespunzatoare unei variatii elementare dq a vectorului coordonatelor generalizate q ale robotului, poate fi exprimata sub forma [4]:

$$\mathrm{d}^{(0)}r_P = J_i(P) \cdot \mathrm{d}q \qquad (1)$$

în care: $J_i(P)$ este matricea jacobiana, de dimensiuni (3xn), corespunzatoare punctului P.

Analog, este adevarata relatia:

$$\mathrm{d}({}^{(0)}O_0 O_i) = J_i(O_i) \cdot \mathrm{d}q = J_i^{(0)} \cdot \mathrm{d}q \qquad (2)$$

în care: O_i este originea reperului $(T_i) = (O_i x_i y_i z_i)$, atasat elementului cinematic (i), iar $J_i(O_i)$ este matricea jacobiana corespunzatoare punctului O_i .

Considerând versorii axelor reperului $(T_i) = (O_i x_i y_i z_i)$, variatia pozitiei acestora în raport cu axele reperului de referinta fix $(T_0) = (O_0 x_0 y_0 z_0)$, pentru o variatie elementara dq a vectorului coordonatelor generalizate q ale robotului, poate fi exprimata cu relatiile:

$$\mathrm{d}({}^{(0)}i_i) = J_i(i) \cdot \mathrm{d}q = J_i^{(1)} \cdot \mathrm{d}q \qquad (3,a)$$

$$\mathrm{d}({}^{(0)}j_i) = J_i(j) \cdot \mathrm{d}q = J_i^{(2)} \cdot \mathrm{d}q \qquad (3,b)$$

$$\mathrm{d}({}^{(0)}k_i) = J_i(k) \cdot \mathrm{d}q = J_i^{(3)} \cdot \mathrm{d}q \qquad (3,c)$$

Tinând seama ca pozitia punctului P în raport cu originea reperului fix (T_0), poate fi determinata cu relatia:

$${}^{(0)}r_P = {}^{(0)}O_0 O_i + {}^{0}R_i \cdot {}^{(i)}O_i P \qquad (4)$$

în care: ${}^{0}R_i$ este matricea de rotatie corespunzatoare orientarii relative a axelor reperelor

(T_0) si (T_i), rezulta ca matricea jacobiana $J_i(P)$ poate fi determinata cu relatia:

$$J_i(P) = J_i^{(0)} + {}^{(i)}x_P \cdot J_i^{(1)} + {}^{(i)}y_P \cdot J_i^{(2)} + {}^{(i)}z_P \cdot J_i^{(3)} \tag{5}$$

unde: ${}^{(i)}x_P, {}^{(i)}y_P, {}^{(i)}z_P$ sunt coordonatele punctului P în raport cu axele reperului (T_i).

Se prezinta în continuare o metoda ce permite determinarea expresiei matricelor jacobiene $J_i^{(k)}, k=\overline{0,3}$. Metoda se bazeaza pe observatia ca fiecare coloana $j, j=\overline{1,n}$, din componenta matricelor jacobiene $J_i^{(1)}, J_i^{(2)}, J_i^{(3)}, J_i^{(0)}$ este data de coloanele suscesive din componenta matricei $\partial^0 T_i / \partial q_j$, unde ${}^0T_i$ este matricea de transformare omogena corespunzatoare orientarii si pozitionarii relative între reperele (T_0) şi (T_i):

$${}^0T_i = \begin{bmatrix} {}^0R_i & {}^{(0)}O_0O_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0T_1(q_1) \cdot {}^1T_2(q_2) \cdot \ldots \cdot {}^{i-1}T_i(q_i) \tag{6}$$

iar: $q_j, j=\overline{1,i}$, sunt coordonatele generalizate corespunzatoare cuplelor active $(C_j), j=\overline{1,i}$, din componenta robotului.

Deci, este adevarata urmatoarea relatie:

$$\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} = \begin{bmatrix} J_{i,j}^{(1)} & J_{i,j}^{(2)} & J_{i,j}^{(3)} & J_{i,j}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

în care: $J_{i,j}^{(k)}, k=\overline{0,3}$, este coloana “j” din componenta fiecarei matrici jacobiene $J_i^{(k)}, k=\overline{0,3}$.

Derivatele partiale ale matricelor de transformare omogena ${}^0T_i$, în raport cu coordonatele generalizate ale robotului $q_j, j=\overline{1,i}, i \geq 2$, pot fi calculate în mod recursiv cu urmatoarele relatii:

$$\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^0 T_{i-1}}{\partial q_j} \cdot {}^{i-1}T_i; \quad j=\overline{1,i-1} \tag{8}$$

$$\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_i} = {}^0T_{i-1} \cdot \frac{d\,{}^{i-1}T_i}{dq_i} \tag{9}$$

în care: ${}^{i-1}T_i = (t_i)_{kl}, i=\overline{1,n}, 1 \leq k,l \leq 4, (t_i)_{41} = (t_i)_{42} = (t_i)_{43} = 0, (t_i)_{44} = 1$, iar matricea de transformare omogena ${}^0T_{i-1}$ poate fi scrisa sub forma:

$${}^0T_{i-1} = \begin{bmatrix} {}^0T_{i-1}^{(1)} & {}^0T_{i-1}^{(2)} & {}^0T_{i-1}^{(3)} & {}^0T_{i-1}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Prin aplicarea relatiilor (8) si (9), tinând seama de relatia (7), rezulta urmatoarele relatii de calcul recursiv pentru determinarea matricelor jacobiene: $J_i^{(k)}, k=\overline{0,3}$:

$$J_{i,j}^{(0)} = (t_i)_{14} \cdot J_{i-1,j}^{(1)} + (t_i)_{24} \cdot J_{i-1,j}^{(2)} + (t_i)_{34} \cdot J_{i-1,j}^{(3)} + J_{i-1,j}^{(0)} \tag{11,a}$$

$$J_{i,j}^{(1)} = (t_i)_{11} \cdot J_{i-1,j}^{(1)} + (t_i)_{21} \cdot J_{i-1,j}^{(2)} + (t_i)_{31} \cdot J_{i-1,j}^{(3)} \tag{11,b}$$

$$J_{i,j}^{(2)} = (t_i)_{12} \cdot J_{i-1,j}^{(1)} + (t_i)_{22} \cdot J_{i-1,j}^{(2)} + (t_i)_{32} \cdot J_{i-1,j}^{(3)} \tag{11,c}$$

$$J_{i,j}^{(3)} = (t_i)_{13} \cdot J_{i-1,j}^{(1)} + (t_i)_{23} \cdot J_{i-1,j}^{(2)} + (t_i)_{33} \cdot J_{i-1,j}^{(3)} \tag{11,d}$$

pentru: $1 \leq j \leq i-1$, iar pentru $j=i$ se obtine:

$$J_{i,i}^{(0)} = {}^0T_{i-1}^{(1)} \cdot \frac{d(t_i)_{14}}{dq_i} + {}^0T_{i-1}^{(2)} \cdot \frac{d(t_i)_{24}}{dq_i} + {}^0T_{i-1}^{(3)} \cdot \frac{d(t_i)_{34}}{dq_i} \tag{12,a}$$

$$J_{i,i}^{(1)} = {}^0T_{i-1}^{(1)} \cdot \frac{d(t_i)_{11}}{dq_i} + {}^0T_{i-1}^{(2)} \cdot \frac{d(t_i)_{21}}{dq_i} + {}^0T_{i-1}^{(3)} \cdot \frac{d(t_i)_{31}}{dq_i} \tag{12,b}$$

$$J_{i,i}^{(2)} = {}^0T_{i-1}^{(1)} \cdot \frac{\mathrm{d}(t_i)_{12}}{\mathrm{d}q_i} + {}^0T_{i-1}^{(2)} \cdot \frac{\mathrm{d}(t_i)_{22}}{\mathrm{d}q_i} + {}^0T_{i-1}^{(3)} \cdot \frac{\mathrm{d}(t_i)_{32}}{\mathrm{d}q_i} \qquad (12,c)$$

$$J_{i,i}^{(3)} = {}^0T_{i-1}^{(1)} \cdot \frac{\mathrm{d}(t_i)_{13}}{\mathrm{d}q_i} + {}^0T_{i-1}^{(2)} \cdot \frac{\mathrm{d}(t_i)_{23}}{\mathrm{d}q_i} + {}^0T_{i-1}^{(3)} \cdot \frac{\mathrm{d}(t_i)_{33}}{\mathrm{d}q_i} \qquad (12,d)$$

Acest calcul recursiv începe cu matricele: $J_{1,1}^{(0)}, J_{1,1}^{(1)}, J_{1,1}^{(2)}, J_{1,1}^{(3)}$, grupate în:

$$\frac{\partial\, {}^0T_1}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} J_{1,1}^{(1)} & J_{1,1}^{(2)} & J_{1,1}^{(3)} & J_{1,1}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Tinând seama ca matricea de transformare omogena ${}^0T_i$ nu depinde de coordonatele generalizate $q_j, j = \overline{i+1,n}$, rezulta ca celelalte coloane ale matricelor jacobiene $J_i^{(k)}, k = \overline{0,3}$, pentru i+1 ≤ j ≤ n, trebuie completate cu zero.

2. APLICATIE

Se exemplifica aplicarea metodei prezentate pentru determinarea matricelor jacobiene: $J_1^{(k)}, J_2^{(k)}$ si $J_3^{(k)}$, $k = \overline{0,3}$, în cazul robotului cu trei grade de libertate din fig. 1, având o structura cilindrica.

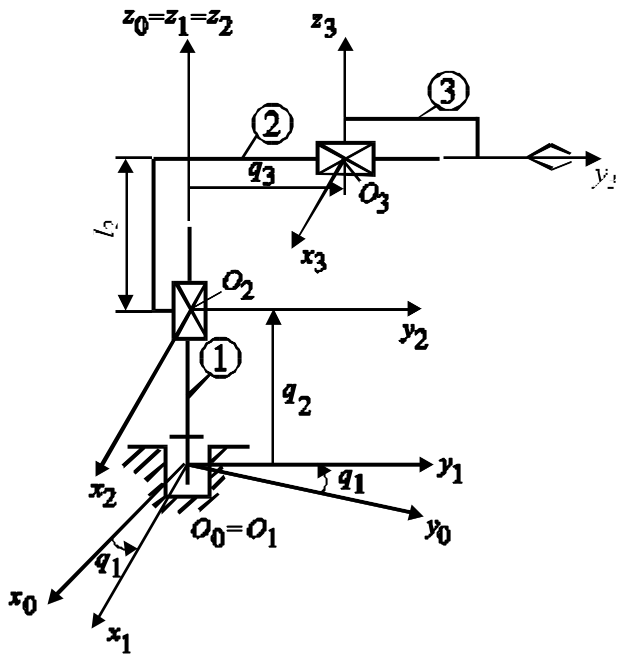

Fig. 1 Robot cu structura cilindrica

Tinând seama de modul cum au fost alese reperele atasate modulelor componente, rezulta ca matricele de transformare omogena ${}^{i-1}T_i, i = \overline{1,3}$, vor avea urmatoarele expresii:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} c1 & -s1 & 0 & 0 \\ s1 & c1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ {}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ {}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

în care:

$$\begin{cases} c1 = \cos q_1 \\ s1 = \sin q_1 \end{cases} \tag{15}$$

Se determina, apoi, matricele de transformare omogena ${}^0T_2$ si ${}^0T_3$:

$${}^0T_2 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c1 & -s1 & 0 & 0 \\ s1 & c1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; {}^0T_3 = {}^0T_2 \cdot {}^2T_3 = \begin{bmatrix} c1 & -s1 & 0 & -q_3 \cdot s1 \\ s1 & c1 & 0 & q_3 \cdot c1 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Aplicând relatiile (11), (12) si (13), rezulta:

$$J_1^{(k)} = \begin{bmatrix} J_{1,1}^{(k)} & 0 & 0 \end{bmatrix}; k = \overline{0,3} \tag{17}$$

unde:

$$\frac{\partial\, {}^0T_1}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} -s1 & -c1 & 0 & 0 \\ c1 & -s1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow J_{1,1}^{(1)} = \begin{bmatrix} -s1 \\ c1 \\ 0 \end{bmatrix}; J_{1,1}^{(2)} = \begin{bmatrix} -c1 \\ -s1 \\ 0 \end{bmatrix}; J_{1,1}^{(3)} = J_{1,1}^{(0)} = 0 \tag{18}$$

$$J_2^{(k)} = \begin{bmatrix} J_{2,1}^{(k)} & J_{2,2}^{(k)} & 0 \end{bmatrix}; k = \overline{0,3} \tag{19}$$

în care:

$$J_{2,1}^{(0)} = 0; \; J_{2,1}^{(1)} = \begin{bmatrix} -s1 \\ c1 \\ 0 \end{bmatrix}; \; J_{2,1}^{(2)} = \begin{bmatrix} -c1 \\ -s1 \\ 0 \end{bmatrix}; \; J_{2,1}^{(3)} = 0 \tag{20}$$

$$J_{2,2}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \; J_{2,2}^{(1)} = J_{2,2}^{(2)} = J_{2,2}^{(3)} = 0 \tag{21}$$

$$J_3^{(k)} = \begin{bmatrix} J_{3,1}^{(k)} & J_{3,2}^{(k)} & J_{3,3}^{(k)} \end{bmatrix}; k = \overline{0,3} \tag{22}$$

$$J_{3,1}^{(0)} = q_3 \cdot \begin{bmatrix} -c1 \\ -s1 \\ 0 \end{bmatrix}; \; J_{3,1}^{(1)} = \begin{bmatrix} -s1 \\ c1 \\ 0 \end{bmatrix}; \; J_{3,1}^{(2)} = \begin{bmatrix} -c1 \\ -s1 \\ 0 \end{bmatrix}; \; J_{3,1}^{(3)} = 0 \tag{23}$$

$$J_{3,2}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \; J_{3,2}^{(1)} = J_{3,2}^{(2)} = J_{3,2}^{(3)} = 0 \tag{24}$$

$$J_{3,3}^{(0)} = \begin{bmatrix} -s1 \\ c1 \\ 1 \end{bmatrix}; \; J_{3,3}^{(1)} = J_{3,3}^{(2)} = J_{3,3}^{(3)} = 0 \tag{25}$$

3. CONCLUZII

Metoda prezentata permite determinarea rapida a expresiei matricilor jacobiene care intervin la determinarea modelului cinematic sau diferential al robotilor industriali. Metoda poate fi aplicata indiferent de configuratia spatiala a robotului studiat si de metoda utilizata la analiza pozitionala a acestuia.

Forma recursiva a calculului matricial utilizat în dezvoltarea relatiilor de lucru permite transpunerea acestora în programe de calculator, utile pentru simularea functionarii robotilor studiati. De asemenea, metoda este deosebit de utila pentru analizarea preciziei de pozitionare a mecanismelor robotilor industriali, pornind de la modelul diferential al acestora.

BIBLIOGRAFIE

1. Badoiu, D. - Analiza structurala si cinematica a mecanismelor, Editura Tehnica, Bucuresti, 2001.
2. Coiffet, P.-La robotique-principes et applications, Editura Hermès, Paris, 1992.
3. Craig, J.J.-Introduction to robotics: mechanics and control, Editura Addison-Wesley, 1986.
4. Dombre, E., Khalil, W.-Modélisation et commande des robots, Editura Hermès, Paris, 1988.